MATHÉMATIQUES (Option générale)

DEUXIÈME COMPOSITION — Durée : 3 heures

Notations :

a. Dans tout le problème, le corps de base est $\mathbb{R}$.

b. On identifie, lorsque c'est utile, un polynôme réel et la fonction polynôme associée.

Partie 1

1.1. n désignant un élément de $\mathbb{N}$, montrer que l'intégrale :

$$I_n = \int_0^{+\infty} e^{-t}\, t^n \, dt$$

est convergente, et la calculer.

En déduire que, pour toute fonction polynôme P,

$$A(P) = \int_0^{+\infty} e^{-t}\, P(t)\, dt$$

est convergente.

1.2. Étudier, selon les valeurs du réel x, la convergence de l'intégrale :

$$\Gamma(x) = \int_0^{+\infty} e^{-t}\, t^{x-1}\, dt.$$

1.3. Démontrer la relation :

$$\Gamma(x+1) = x\,\Gamma(x),$$

où x est un réel strictement positif. En déduire le calcul de $\Gamma(n)$, où n est un élément de $\mathbb{N}^*$, puis retrouver le résultat de (1.1).

Montrer la convergence de l'intégrale $\int_0^{+\infty} e^{-t^2}\, dt$.

En admettant sans démonstration que cette intégrale est égale à $\frac{\sqrt{\pi}}{2}$, en déduire la valeur de $\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)$, puis celle de $\Gamma\left(n+\frac{1}{2}\right)$, où n est élément de $\mathbb{N}$.

Partie 2

2.1. Soit $\mathbb{R}(X)$ l'espace vectoriel des polynômes à coefficients réels. Montrer que $\mathbb{R}_n(X)$, ensemble des polynômes de $\mathbb{R}(X)$ de degré au plus égal à n, est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}(X)$, dont on précisera la dimension.

2.2. À tout élément de $\mathbb{R}_2(X)$, défini par :

$$p(X) = a + bX + cX^2,$$

on associe le polynôme P défini par :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \qquad P(x) = \int_0^{+\infty} e^{-t}\,(x^2 - tx + t^2)\, p(t)\, dt,$$

et on pose :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \qquad P(x) = [u(p)](x)$$

a. Démontrer que l'application u qui associe P à p est un endomorphisme de $\mathbb{R}_2(X)$, dont on déterminera la matrice M dans la base $\{1, X, X^2\}$ dite base canonique de $\mathbb{R}_2(X)$.

b. Calculer le polynôme caractéristique de la matrice M; démontrer qu'il admet trois racines réelles distinctes. (*Aucune des racines n'a une forme algébriquement simple; il n'est pas demandé de donner leur valeur numérique.*)

Que peut-on en déduire ?

2.3. $\mathbb{R}_n$ désigne ici l'ensemble des $(n+1)$ – uplets $(a_0, a_1, \ldots, a_n)$ de nombres réels. Soit Φ l'application de $\mathbb{R}_n(X)$ dans $\mathbb{R}_n$ définie par :

$$0 \leqslant k \leqslant n, \qquad a_k = \int_0^{+\infty} e^{-t}\, t^k\, p(t)\, dt$$

où p désigne un élément de $\mathbb{R}_n(X)$.

a. Montrer que Φ est linéaire.

b. Montrer que, si s est un polynôme tel que $\Phi(s) = \vec{0}$, on a :

$$\int_0^{+\infty} e^{-t}\, s^2(t)\, dt = 0.$$

En déduire que Φ est un isomorphisme.

m désignant un élément de $\mathbb{N}^*$, q_m désigne un polynôme de $\mathbb{R}_m(X)$ satisfaisant aux conditions suivantes :

$$1 \leqslant k \leqslant m, \qquad \int_0^{+\infty} e^{-t}\, t^k\, q_m(t)\, dt = 0,$$

$$\int_0^{+\infty} e^{-t}\, q_m(t)\, dt = 1.$$

3.1. Vérifier l'existence et l'unicité de q_1 et q_2; calculer $q_1(t)$ et $q_2(t)$.

3.2. Démontrer que, pour tout m élément de $\mathbb{N}^*$, q_m existe et est unique.

3.3. q'_m désigne le polynôme dérivé de q_m. Montrer que :

$$2 \leqslant k \leqslant m, \qquad \int_0^{+\infty} e^{-t}\, t^k\, q'_m(t)\, dt = 0,$$

$$\int_0^{+\infty} e^{-t}\, t\, q'_m(t)\, dt = -1,$$

$$\int_0^{+\infty} e^{-t}\, q'_m(t)\, dt = 1 - q_m(0).$$

3.4. On suppose ici $m \geqslant 2$. On pose :

$$H_{m-1} = q'_m - q'_{m-1} + q_{m-1}$$

Montrer que :

$$1 \leqslant k \leqslant m-1, \qquad \int_0^{+\infty} e^{-t}\, t^k\, H_{m-1}(t)\, dt = 0.$$

Cette relation subsiste-t-elle pour $k = m$?

3.5. On suppose encore $m \geqslant 2$. Calculer H_{m-1}. En déduire que :

$$\forall\, t \in \mathbb{R}, \qquad q'_m(t) = -\left[1 + \sum_{k=1}^{m-1} q_k(t)\right].$$

3.6. Calculer $q_m(0)$. Donner une nouvelle méthode de calcul de $q_2(t)$ et retrouver le résultat correspondant.

On note α_m le coefficient de t^m dans $q_m(t)$. Calculer α_m et vérifier que, pour tout m élément de $\mathbb{N}^*$, $\alpha_m \neq 0$.